A noção de integral no livro didático e os seus registros de representação semiótica

Prof. Ms. Carlos Antônio da Silva

Resumo

O ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral considerado básico nos cursos da área de Ciências Exatas, muitas vezes tem sido focado, ao longo dos anos, numa prática metodológica "tradicional" baseada em: definições, teoremas, propriedades, exemplos e exercícios. Essa metodologia tem contribuído para um índice muito alto de abandono e repetência. No ensino desta disciplina mesmo com as novas tecnologias usadas como ferramentas didáticas, o livro didático ainda tem uma importância fundamental. Neste trabalho escolhemos o tema Integral para analisar como dois livros didáticos tratam este conteúdo, à luz da teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (1993). Trata-se de uma análise qualitativa, baseada num exame cuidadoso das duas obras selecionadas. A análise foi feita de forma a possibilitar que eses livros sejam melhor explorados, indicando a futuros professores e alunos que eles são ricos em informações e que, se bem utilizados, podem constituir-se em um instrumento valioso para a aprendizagem. Os resultados mostram que se os livros forem bem explorados podem levar o aluno a um melhor entendimento, através da utilização das conversões, com visualização gráfica dos conceitos em uma situação contextualizada e motivadora, tanto para os alunos como para os professores.

Palavras-chave: integral, livro didático, registros, tratamentos, conversões.

Abstract

Teaching and learning calculation and Integral considered basic in the field of Mathematics Education courses, for many times, has been focused on a 'traditional' methodological practice based on: definitions, theorems, properties, examples and tests. That methodology has been contributing to a very high rate of abandonment and failure. In teaching this subject, even if we have new technologies used as didactic tools, the textbook is still very important. In this paper, we have chosen Integral to analyze how two textbooks treat this content, based on the Registers of Semiotic Representation by Raymond Duval. It is a qualitative analysis, based on a careful exam of two selected books. The analysis was made in order to allow a deeper study of textbooks, showing tofuture teachers and students that the books have great information and if we know how to use them they can be a valuable tool for the learning process. The results show that if the books are better studied student can get a wide comprehension, through conversions, with graphic displays of concepts in a situation of context and motivation both for students and teachers.

Key words: integral, textbook, registers, treatments, conversions.

Sobre o autor

Carlos Antônio da Silva
Natural de Perdizes/MG

Graduado em Licenciatura Plena em Matemática (UNIARAXA)
Pós-graduado em Ensino de Matemática (UNICLAR)
Em Psicopedagogia (UFU/UNIARAXA)
Em Matemática (UFU)
Mestrado em Educação Matemática (PUC-SP)

Publicação:

Dissertação de Mestrado com título
"A noção de integral no livro didático
e os registros de representação semiótica" - 2004.

A noção de integral no livro didático e os seus registros de representação semiótica

Prof. Ms. Carlos Antônio da Silva

Introdução

Nos últimos anos, surgiram muitas pesquisas visando diagnosticar as causas das dificuldades apresentadas no processo de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral, bem como tentando buscar soluções, inclusive lançando mão de tecnologias facilitadoras de aprendizagem dos conceitos tratados nessa disciplina. Vários softwares (maple, graphmática, winplotz, etc...) e seqüências de ensino têm sido criados e usados na Educação Matemática. Porém, o livro didático ainda continua sendo amplamente utilizado como manual dos professores, trazendo muitas representações que auxiliam na aprendizagem.

A experiência em sala de aula tem mostrado que muitos alunos não compreendem o conceito de integral. Essa não compreensão se revela em diversos momentos, como por exemplo, ao se deparar com um problema na língua natural em que se pede para calcular a área de uma região. Em geral, o aluno tem dificuldade de representar graficamente tal situação e de interpretar a integral como sendo a ferramenta, por excelência, para efetuar esse cálculo. Tais dificuldades talvez sejam devidas ao ensino que, na maioria das vezes, se restringe à aplicação de técnicas, de regras e de algoritmos, como é evidenciado nos resultados de muitas pesquisas em Educação Matemática.

Segundo alguns pesquisadores, a disciplina Cálculo Diferencial e Integral, presente em vários cursos de nível superior, tem como objetivo servir de base na formação em diversas carreiras, devido a sua grande aplicabilidade, entre outras coisas, desempenhando importante papel na representação dos fenômenos e como instrumento para a resolução de problemas. No entanto, sabe-se que a maneira como é desenvolvida é alvo de críticas e preocupações de alunos e professores dos mais diversos cursos de graduação, seja da área de exatas, biológicas ou humanas (Capatani, 2001; in Bolema nº 16, p. 48). De modo geral, o sistema educativo tem enfrentado problemas em disciplinas matemáticas, e com o Cálculo não é diferente. Essa disciplina tem apresentado elevados índices de reprovação, evasão e insucesso, e desconsiderando outros fatores, esses problemas têm afastado das universidades vários alunos que conseguiram alcançar o terceiro grau (Franchi, 1993, 1995; Palis, 1995).

Barbosa & Neto (1992: 61-62) realizaram um estudo em relação ao rendimento dos alunos na disciplina de Cálculo na Universidade Federal do Ceará, através de uma amostra de 97 alunos de 18 turmas desta disciplina. Foi constatado que apenas 27,9% dos alunos obtiveram aprovação e o restante, 72,1%, não obteve êxito. Em alguns casos, estes percentuais de aprovação são baixíssimos, como ocorreu com uma turma do curso de Matemática, com 9,4% de aprovação e uma turma do curso de Geologia, com 6,4% de aprovação. Morellatti (2001) confirmou a situação em sua pesquisa realizada na UNESP/Presidente Prudente, de 1993 a 1998, constatando que os percentuais de alunos reprovados oscilaram de 50% a 71%. Estes resultados levaram Palis (1995) a apontar para a necessidade de se buscarem alternativas de ação pedagógica que, aliadas a outras medidas, possam resolver ou amenizar esse problema que, desde muitos anos, subsiste no Ensino Superior.

Dada a influência que os livros didáticos exercem no processo escolar, eles poderiam (ou não) favorecer uma visão do real significado da Integral, mostrando a dinâmica de sua estrutura e a história dos seus sujeitos e objetos. Contudo, para que os resultados das atividades realizadas em sala de aula se aproximem da Ciência e possam propiciar ao aluno uma visão mais autêntica, é preciso que o professor domine toda essa complexidade. Esse resultado pode depender mais do trabalho do professor do que dos livros didáticos e currículos e de como ele se apropriou desse conhecimento, das peculiaridades de sua formação científica e da consciência que tenha dos fundamentos de seu trabalho, o que ressalta a necessidade de atenção especial para a formação do educador. No entanto, em muitos casos, o papel desempenhado pelo livro é predominante no processo ensino e aprendizagem; ele participa como um significativo recurso pedagógico para professores e alunos.

Esta constatação levou Barufi (1999: 127-133) a analisar 24 livros, concluindo que bons livros sempre existiram e que, se a maioria deles não focalizou as idéias mais importantes do Cálculo através de problemas motivadores, outros, mesmo não partindo de situações problema, conseguiram mostrar diversas aplicações do Cálculo. Nos resultados de sua pesquisa, Barufi conclui também que 29% dos livros analisados explicitam fortemente as idéias fundamentais do cálculo que historicamente propiciaram seu desenvolvimento ou que são importantes por sua atualidade. O autor observou que 38% deles apresentam problemas importantes para motivar a introdução dos conceitos. Detectou que 66% utilizam outras representações, além da simbólica, com o objetivo de convencer o leitor, discutir dificuldades e mostrar caminhos possíveis.

A relação entre professor, livro didático e aluno é discutida por Aline Robert e Jacqueline Robinet (1989) em um de seus trabalhos de pesquisa sobre os enunciados de exercícios e as representações dos autores de livros didáticos. As autoras afirmam que, freqüentemente, existe uma ligação estreita entre as representações metacognitivas dos professores de Matemática e as dos autores de livros didáticos, embora, na prática, muitos professores façam ajustes nos exercícios apresentados nesses livros. Ressaltam que estes exercícios podem exercer influência sobre a aprendizagem da matemática, pois, por exemplo, a freqüência com que certo tipo de exercício aparece pode fazer com que o aluno acredite que seja mais ou menos importante (Araújo, 2002).

Qualquer que seja o processo utilizado para se alcançar sucesso na aprendizagem, ele se apóia em algum tipo de representação, uns mais sofisticados com representações dinâmicas (softwares), outros mais simples (usando papel e lápis). Pode-se observar que tais representações são importantes, pois o aluno, na tentativa de resolver qualquer questão, procura representá-la de alguma forma, como meio de auxiliar o entendimento. Porém, mesmo com tanta tecnologia, nas aulas o livro didático ainda é muito presente. Ele traz uma infinidade de representações que, talvez, podem estar sendo mal utilizadas.

A princípio, foram levantadas algumas questões tais como: Será que os dois livros trazem todas as formas para a representação de Integral? Os tratamentos são explorados nos seus diversos registros? É dada importância às conversões? Como isso se dá? As conversões não-congruentes são exploradas? Os tratamentos são diferenciados das conversões? Os livros dão condições para que o aluno não confunda o objeto e sua representação?

Fundamentação Teórica

Para nortear o trabalho foi escolhida a Teoria Registros de Representação Semiótica de Duval, que trata de aspectos cognitivos relacionados com a aquisição dos conhecimentos matemáticos.

Duval (1993) dedica parte do capítulo III da obra "Conversion et Articulation des Representation Analogiques" à analise das representações produzidas em um capítulo de livro, em uma seqüência, em trabalhos de alunos ou mesmo em artigos de revista de grande público, em um hipertexto... Afirma o autor:

> ... não se podem analisar as representações sem, primeiramente, identificar as funções que comandaria sua produção. Essas são as duas questões que devemos agora abordar. Como efetuar uma análise funcional de representações? O que se pode esperar de uma análise funcional de representações? (DUVAL, 1993)

Para o autor, a análise de texto é importante, pois os tratamentos que intervêm no processo de compreensão do mesmo não são unicamente os ligados ao grau de complexidade da forma lingüística, dependem também do conteúdo cognitivo que ele traz. E ainda, a estrutura do texto pode facilitar ou dificultar essa compreensão.

De acordo com Duval, o termo "representação" não pode ser empregado sem um adjetivo que o especifique. Pois as distinções entre os tipos de representação tendem a se multiplicar. O autor distingue as representações através da relação de duas funções: objetivação ou expressão e tratamento. Assim, distingue três classes de representações: as representações que exercem somente a função de tratamento, as representações internas, que revelam tratamentos não intencionais e inconscientes; as representações que exercem somente a função de objetivação - nesta classe aparecem imagens mentais, crenças...; e as representações que exercem a função de tratamento e de objetivação. Aqui aparecem as representações semióticas.

Segundo Duval, os objetos matemáticos são abstratos e para serem apreendidos devem ser evocados através de representações semióticas, e é importante não confundir o objeto matemático com sua representação. O autor levanta, em sua teoria, três pontos importantes da função cognitiva para a existência dos registros semióticos usados em matemática. São eles: a representação, o tratamento e a conversão. Sendo que o que garante a apreensão de um objeto e sua conceitualização é a coordenação entre os vários registros de representação. Em suas pesquisas, Duval percebeu que as maiores dificuldades de aprendizagem surgem no contexto da conversão. Isto é, os alunos não conseguem coordenar os vários registros que estão à sua disposição. Para que um sistema semiótico possa ser um registro de representação, ele deve preencher as três atividades cognitivas fundamentais que são: a formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão. São exemplos de representação identificável: enunciado de uma frase (compreensível na língua dada), elaboração de um texto, desenho de uma figura, elaboração de um esquema, escrita de uma fórmula...

O tratamento de uma representação é a transformação desta no interior do mesmo registro em que foi tomada (Exemplo: $0{,}25+0{,}25=0{,}5$ ou $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ Existem regras de tratamento próprias a cada registro; sua natureza e o número de tratamentos variam consideravelmente de um registro para outro. Por exemplo: o cálculo é uma forma de tratamento próprio às escritas simbólicas (cálculo numérico, cálculo algébrico, cálculo proporcional...); a paráfrase e a inferência são formas de tratamento em uma língua natural; a reconfiguração é um tipo de tratamento particular para as figuras geométricas, sendo esta uma das numerosas operações que dá ao registro das figuras um papel heurístico; a anamorfose é uma forma de tratamento que se aplica a toda representação figural...

A conversão de um registro de representação é a transformação deste em um outro registro, conservando a totalidade ou uma parte do objeto matemático. A conversão requer que o sujeito tenha percebido a diferença entre o que Frège chamava o sentido e a referência dos símbolos ou dos signos. Para a escrita do número, é preciso distinguir a significação operatória ligada ao significante (a conversão não pode ser a mesma para 0.25 para $\frac{1}{4}$ e para $25{\cdot}10^{-2}$ e não são os mesmos tratamentos para efetuar as três adições $0.25+0.25=0.5$; e $25\cdot10^{-2}+25\cdot10^{-2}=50\cdot10^{-2}$), e o número representado equivale não ao significanate 0.25, nem ao significante $\frac{1}{4}$, nem ao significante $25{\cdot}10^{-2}$. Cada uma dessas três escritas tem uma significação operatória diferente, mas representa o mesmo número (DUVAL, IREM, 1992).

A atividade de conversão envolve o conceito de congruência e não-congruência. As mudanças de registro se situam ao lado dos sistemas produtores de representação. E isso pode conduzir a uma distorção de imagens, pois o sujeito pode ver coisas diferentes. Caso seja reduzido o objeto ao conteúdo de representação, duas escrituras diferentes de um mesmo número são então vistas como dois números diferentes. Estes fenômenos são os de congruência e de não-congruência. Por congruência entende-se "a representação no registro de chegada transparece de certa forma na representação do registro de partida", isto é, a conversão se dá de forma natural. Caso contrário, entende-se não-congruência quando há bloqueamento ou confusão para a passagem de um registro a outro. As conversões não-congruentes são mais numerosas e são responsáveis pela maioria das dificuldades de aprendizagem matemática, já que elas dificultam a coordenação entre registros.

Pavlopovlou (1998) estudou dois aspectos ligados à congruência ou não, na atividade de conversão. Em sua análise sobre aprendizagem de Álgebra Linear, a autora observou que dois fatores estariam intimamente ligados a essa questão: i) a natureza dos registros de representação: saber fazer a passagem do registro tabela (T) ao registro gráfico (G) não permite fazer a passagem de um registro tabela (T) ao registro de escrita simbólico (S); ii) o sentido de conversão: saber fazer a passagem do registro simbólico (S) ao registro tabela (T) não garante realizar o caminho inverso.

Existem diferentes graus de congruência dependendo do sentido da conversão. A conversão da equação da reta para o gráfico é congruente, porém a volta não o é. No entanto, são imprescindíveis as conversões nos dois sentidos, pois a aprendizagem requer a coordenação dos distintos registros de representação que um domínio do conhecimento mobiliza.

Análise

Os livros analisados são: "Cálculo", de James Stewart (2002) e "Um Curso de Cálculo", de Hamilton Luiz Guidorizzi (2001). O primeiro apresenta o estudo da Integral em cinco capítulos. Em um deles, continuando o estudo de derivadas, Stewart insere o assunto antiderivada. No seguinte, trata da definição de integral. Em outro, desenvolve algumas aplicações e, na seqüência, trabalha técnicas de integração. Por fim, apresenta mais aplicações. O segundo livro dedica quatro capítulos ao assunto. No primeiro, trabalha a primitiva de uma função; no segundo, apresenta a definição de Integral; no seguinte, trabalha as técnicas de primitivação e, no último, trata de aplicações.

Apresentaremos uma análise quantitativa dos tipos de registros de representação semiótica, utilizados por cada autor, com uma reflexão qualitativa.

Para apresentar um panorama das obras fazemos um "raio-X" do interior das mesmas, buscando quantificar os exercícios e exemplos que são explorados. Não é objetivo deste estudo fazer uma análise minuciosa dessas quantidades, mas apresentá-las de forma sucinta e fazer uma pequena comparação entre as obras. Para tal, apresentamos quatro tabelas: a primeira delas (tabela 1) refere-se à quantidade de exemplos apresentados nos diversos capítulos que tratam da integral, sob um olhar dos registros utilizados na apresentação dos enunciados; em outra (tabela 2), pode-se verificar a exploração dos registros usados nas resoluções propostas pelos autores para os exemplos trabalhados.

Apresentamos, também, tabelas, mostrando a quantidade de exercícios enunciados em cada obra, sob dois olhares: no primeiro (tabela 3), os exercícios são quantificados segundo os registros utilizados na elaboração dos enunciados. Em outro olhar (tabela 4), procuramos quantificar os exercícios, fazendo diferenciação entre aqueles que utilizam técnicas, isto é, do tipo "calcule..."; problemas propostos; exercícios nos quais os autores propõem a utilização de recursos tecnológicos (software e calculadora gráfica) e fizemos uma quarta classificação para envolver exercícios diversos que não recaíssem nos casos anteriores.

No que se refere à quantidade de exemplos explorados nos capítulos, os autores não divergem e, praticamente, não há diferenças. Na seção em que são trabalhadas as primitivas de uma função, Guidorizzi utiliza uma quantidade superior de exemplos; já nas aplicações, Stewart apresenta maior número, até porque o faz em dois capítulos. O maior número de exemplos em ambas as obras aparece no desenvolvimento das técnicas de integração.

Nas três primeiras tabelas em que são trabalhados registros de representação semiótica, é utilizada a legenda: (S) registro simbólico (englobando simbólico algébrico e simbólico numérico), (G) gráfico, (LN) língua natural e (T) tabelas.

QUANTIFICAÇÃO DOS EXEMPLOS QUANTO AOS REGISTROS UTILIZADOS NO ENUNCIADO											
GUIDORIZZI						STEWART					
Capítulo	S	G	LN	T	Total	Capítulo	S	G	LN	T	Total
10	17		3		20	Seção 4.10	4	4	4		8
11	23	14	13		29	5	32	3	16	1	39
12	70	1			70	6	13		24		25
13	24	19	10	4	30	7	52		25		61
						8	10		20		20
Total	134	34	26	4	149	Total	111	7	89	1	153

Tabela 1

A tabela 1 mostra a quantificação dos exemplos, considerando os registros utilizados na apresentação dos seus enunciados. Os registros mais utilizados pelos dois autores são o simbólico e língua natural. O registro tabela é pouco utilizado, apenas Guidorizzi o faz no capítulo sobre aplicações; o mesmo ocorre com o registro gráfico, que é pouco utilizado por Stewart. O registro simbólico aparece em grande quantidade ao se trabalharem as técnicas de integração.

QUANTIFICAÇÃO DOS EXEMPLOS QUANTO AOS REGISTROS UTILIZADOS NA RESOLUÇÃO APRESENTADA											
GUIDORIZZI						STEWART					
Capítulo	S	G	LN	T	Total	Capítulo	S	G	LN	T	Total
10	20		7		20	Seção 4.10	4	4	4		8
11	25	13	5		29	5	31	17	18	4	39
12	69	1	4		70	6	24	18	23	1	25
13	20	23	13	4	30	7	57	23	41	4	61
						8	20	14	9	2	20
Total	134	37	29	4	149	Total	80	53	95	11	153

Tabela 2

Quanto aos registros usados nas resoluções dos exemplos, a tabela 2 mostra que aumenta, ainda mais, o uso do registro simbólico. Quanto ao registro língua natural, Stewart lança mão, mais vezes que Guidorizzi. A tabela 2 mostra que o registro gráfico é bastante explorado pelos dois autores. Além disso, os dados desta tabela associados ao da anterior apontam a resistência quanto ao uso da conversão do registro gráfico para o simbólico. Na maioria dos casos, a conversão ocorre no sentido inverso dos registros citados anteriormente. O registro tabela é pouco usado, mas com um índice maior de aparecimento nas resoluções do que nos enunciados.

A análise das tabelas referentes ao número de exercícios propostos : urpreendeu-nos, pois a quantidade usada por Stewart é superior a cinco vezes à usada por Guidorizzi.

QUANTIFICAÇÃO DOS EXERCÍCIOS QUANTO AOS REGISTROS UTILIZADOS NO ENUNCIADO											
GUIDORIZZI						STEWART					
Capítulo	S	G	LN	T	Total	Capítulo	S	G	LN	T	Total
10	17		8		25	Seção 4.10	54	7	15	1	77
11	67	4	40		109	5	291	20	63	9	406
12	91				91	6	144	10	90	2	248
13	18		28		46	7	478	9	117	5	585
						8	78	9	116	2	179
Total	193	4	76		271	Total	1045	55	401	19	1495

Tabela 3

Nos enunciados dos exercícios, os autores usam mais os registros simbólico e língua natural. Guidorizzi usa unicamente o primeiro registro para trabalhar as técnicas de integração, e o registro língua natural aparece com certa expressão nos enunciados dos exercícios dos capítulos referentes à definição e aplicações. O registro gráfico é pouco utilizado e as tabelas são inexistentes. Já Stewart utiliza os quatro registros, mas a predominância é dos registros simbólico e língua natural. Porém, o gráfico aparece 55 vezes e as tabelas inseridas em 19 enunciados. Quando se trata do cálculo de área, Stewart usa mais o registro gráfico. O registro língua natural aparece de forma considerável no momento das aplicações.

Na tabela abaixo, que se refere à quantificação de exercícios quanto ao tipo de resolução, as siglas utilizadas possuem os seguintes significados: (T) exercícios que valorizam técnicas, (P) exercícios que são situações problemas, (O) outros e (RT) aqueles em que é sugerida a utilização de recursos tecnológicos (Computador, calculadora gráfica, etc).

QUANTIFICAÇÃO DOS EXERCÍCIOS QUANTO AO TIPO DE RESOLUÇÃO											
GUIDORIZZI						STEWART					
Capítulo	T	P	O	RT	Total	Capítulo	T	P	O	RT	Total
10	11	5	9		25	Seção 4.10	48	16	13	6	77
11	90	17	2		109	5	267	62	76	19	406
12	81		10		91	6	135	70	43	13	248
13	23	16	7		46	7	418	32	35	44	585
						8	50	58	73	18	179
Total	205	38	28		271	Total	868	238	230	100	1495

Tabela 4

Nesta última tabela, nosso objetivo foi fazer um levantamento, principalmente, dos exercícios que usam técnicas e dos problemas propostos. No momento desta análise, surgiu outro item que consideramos de fundamental importância. São os exercícios em que é sugerido o uso de recurso tecnológico, dada a crescente utilização dos computadores. Não nos preocupamos com a análise dos registros envolvidos ao se usarem estes recursos, por se tratar, às vezes, de representações dinâmicas, o que seria tema para uma outra pesquisa. Quanto à sugestão deste recurso, ela aparece apenas no livro do Stewart e em quantidade considerável. Já os exercícios que utilizam técnicas, aparecem em maior número em ambos os livros, o que nos leva a verificar a associação com a utilização do registro simbólico. E os problemas aparecem em um número menor de vezes.

O estudo desta última tabela ressalta um fato: grande quantidade de exercícios sugerindo a utilização de recursos tecnológicos. Talvez isto se deva à realidade vivenciada pela população para a qual o livro foi elaborado. Surge uma questão: será que as nossas faculdades estão aparelhadas para que o aluno desenvolva tais atividades?

Destacamos um exemplo interessante desenvolvido por cada autor. Guidorizzi nos chama a atenção pelo uso do registro gráfico para mostrar que, quando se processa a mudança de variável, altera-se o intervalo de integração, mas o valor da integral não se modifica.

Exemplo 1. Calcule $\int_0^1 (x-1)^{10}\ dx$.

Solução

Façamos $x-1=u$, ou seja, $x=u+1$.

$$\begin{cases} x=u+1;\ dx=(u+1)'\,du \text{ ou } dx=du \\ x=0;\ u=-1 \\ x=1;\ u=0 \end{cases}$$

$$\int_0^1 (x-1)^{10}\ dx=\int_{-1}^0 u^{10}\ du=\left[\frac{u^{11}}{11}\right]_{-1}^0=\frac{1}{11}$$

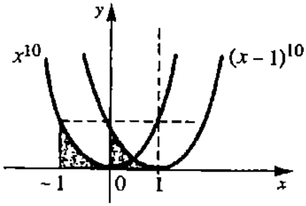


Figura 1: página 318

A área da região A é o valor da integral, antes da mudança de variável e a da região B é o valor da integral após a mudança. A conversão para o registro gráfico permite melhor visualização, não ficando abstrato para o leitor. Observa-se que as curvas são "parecidas", houve apenas a translação horizontal de uma unidade para a direita. Com isso, o intervalo também se desloca. Esta conversão é de fundamental importância para o entendimento do que ocorre ao se fazer a mudança de variável, o que não é perceptível no registro simbólico.

Já Stewart usa um problema de cálculo de área para desenvolver a idéia de integral e para isso lança mão do registro gráfico para fazer a aproximação do valor da área.

Exemplo 1. Use retângulos para estimar a área sob a parábola $y = x^2$ de 0 até 1 (a região parabólica S ilustrada na figura 3).

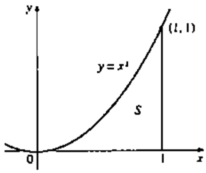
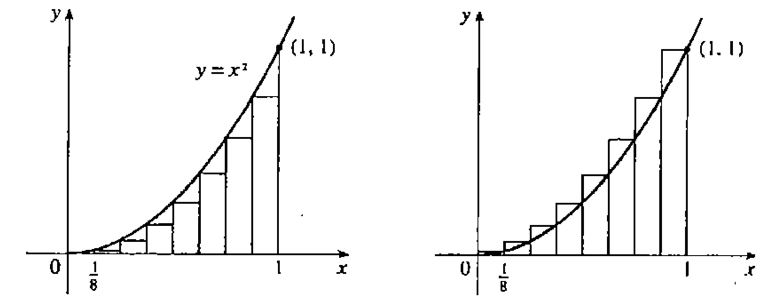


Figura 2: página 368

O enunciado é expresso no registro língua natural e o autor apresenta uma conversão para o registro gráfico, no qual são mostrados os vários elementos apresentados no problema, ficando claros os limites da região. É interessante notar que foi pedido para estimar a área e não para encontrar ou calcular, isto é, dar um valor aproximado, usando retângulos. Isto dá margem para se trabalhar com a quantidade de retângulos que se quiser. A solução é apresentada, mostrando o cálculo desta área de forma evolutiva em termos da quantidade de retângulos. Vemos a seguir a representação utilizando oito retângulos inferiores e oito superiores, obtendo aproximações da área desejada, a saber: $0{,}2734375 < A < 0{,}3984375$



(a) Usando os extremos esquerdos (b) Usando os extremos direitos

Figura 3: página 369

O registro tabela é inserido através da conversão de registros. Isto permite uma melhor estimativa da área, pois aumentando o número de retângulos, por exemplo, para mil partes, temos que a área está entre 0,3328335 e 0,3338335 o que seria muito difícil de visualizar no registro gráfico.

	L_n	R_n
10	0,2850000	0,3850000
20	0,3087500	0,3587500
30	0,31668519	0,3510852
50	0,3234000	0,3434000
100	0,3283500	0,33835000
000	0,3328335	0,3338335

Tabela 5: página 369

Conclusão

Apesar de o livro didático não ser o único elemento responsável pelo saber adquirido pelos estudantes, ele exerce um papel destacado no processo de ensino e aprendizagem, em função da sua importância como um instrumento pedagógico para o professor, sugerindo-lhe conteúdo, atividades e até mesmo metodologia de ensino. Mesmo em meio a tanta tecnologia, o livro é o grande curriculista e também um manual muito importante para professores e alunos. Em outro aspecto, observamos a importância e a riqueza que existe por detrás das representações, e que espelham a alma e a vida de seus escritores, revelando momentos, idéias e conhecimentos de homens que dedicaram suas vidas à Matemática e ao seu ensino. Cada autor no seu momento de inspiração procura registrar a essência dessa disciplina tão importante, seja mostrando as aplicações, curiosidades ou explorando os registros que são de fundamental importância para o entendimento dos conteúdos representados, e que, de certa forma, atraem o leitor para aprofundar os seus conhecimentos.

O livro didático tem sido reestruturado para que venha a ser um instrumento facilitador da aprendizagem, inclusive para atender às necessidades do ensino em meio a essa grande corrida tecnológica que está proposta. Visando atender a essa necessidade, Stewart propõe o uso do CAS (sistemas algébricos computacionais). Não restam dúvidas de que temos que nos preparar para essa revolução do ensino, que sofre mudanças a cada instante. Estes recursos também usam representações: quais são elas, como são utilizadas, quais as influências no ensino? Devemos buscar respostas para que estes recursos tão importantes não sejam utilizados apenas como um passatempo.

Portanto, os livros didáticos não devem ser vistos apenas como meios de representação dos conteúdos para serem transmitidas definições, regras e propriedades. Eles devem abranger um conteúdo vivo, que consiga "conversar" com seu leitor e contenha mais do que apenas aquelas representações. Por detrás de cada uma delas deve-se revelar o quanto a Matemática é importante e levar o leitor a ter o desejo e gosto por estudá-la. O que temos freqüentemente ouvido de alunos é que os livros de Matemática são complexos e ninguém entende nada do que nele está escrito. Fica então uma boa oportunidade de uma pesquisa para responder à pergunta: Qual será a leitura que o aluno faz de livros didáticos ao estudar a integral?

Julgamos importante fazer a comparação entre os livros, não para dizer que um seja melhor ou pior do que o outro, mas para mostrar a importância da utilização dos registros no auxílio à aprendizagem de Matemática, pois os objetos matemáticos somente podem ser trabalhados e estudados a partir de suas representações. Para Duval, circular pelos registros de representação semiótica é de fundamental importância, portanto os livros devem favorecer esta circulação.

As duas abordagens de apresentação do conceito de integral têm pontos distintos: se por um lado, Guidorizzi apresenta o conceito de forma mais técnica, Stewart procura apresentar o conceito de forma a facilitar o entendimento e a visualização por parte do leitor, através de exemplos. O primeiro utiliza os registros simbólico e gráfico para levar, de forma rápida, à definição de integral, após definir partição e soma de Riemann: faz em seguida apresentação de algumas propriedades na forma de teorema, com algumas demonstrações, no registro simbólico. O segundo, através dos problemas de área e distância, que são um incentivo para o aluno estudar o assunto, faz um trabalho intenso, explorando, em especial, os registros gráfico e simbólico para chegar à definição de integral. Stewart desenvolve o cálculo das áreas por aproximação usando a construção de retângulos, que chama de aproximantes. Trabalha a visualização da área, tomando como altura dos mesmos os valores das funções nos extremos esquerdo e direito das bases que são iguais. Faz comparação entre valores encontrados e, na medida em que se aumenta o número de retângulos, percebe-se que o valor tende a ser determinado. Só então é usado o registro simbólico para mostrar que a área pode ser encontrada através do limite da soma das áreas desses retângulos, quando o número deles tende ao infinito. O autor trabalha durante todo o desenvolvimento utilizando bases de mesma largura. Na definição ele explicita que o ponto escolhido na partição é arbitrário, porém nos exemplos e exercícios propostos apenas utiliza os extremos e o ponto médio de cada subintervalo. Não é relatado que os subintervalos podem ser de tamanhos diferentes e que o maior deles tenda a zero. Vemos assim que não se contemplam, na totalidade, pontos importantes e essenciais da definição da integral de Riemann.

Já Guidorizzi escreve sobre a escolha arbitrária do ponto nos subintervalos, que ela difere pouco de quando se toma o ponto médio e também argumenta que os tamanhos dos subintervalos podem ser tão pequenos quanto se queira. No entanto, também não explicita que eles podem ter tamanhos distintos, apesar de definir a integral partindo do limite da soma com o maior dos subintervalos tendendo a zero.

Ambos os autores não discutem a questão da integrabilidade de funções que não sejam contínuas. Eles partem da condição de que a função é contínua e definida no intervalo em que ocorrerá a integração. Em um dos exemplos, Stewart discute a questão da não existência da integral de uma função que não está definida num ponto do intervalo de integração, descrevendo tal fato como sendo a ocorrência de uma "descontinuidade infinita" nesse ponto.

Entendemos que esta questão deveria ser mais aprofundada, inclusive, explorando o registro gráfico para observar pontos de descontinuidade, mostrando que em alguns casos funções descontínuas são integráveis e em outros não, como ocorre no exemplo citado em que a função tem um ponto de "descontinuidade infinita". E ainda entendemos que poderia ser trabalhada mais explicitamente a questão do refinamento de uma partição, e de que os pontos escolhidos são arbitrários, não precisando ser os extremos dos subintervalos, como propõe Stewart.

Na seqüência à definição, Guidorizzi apresenta o teorema fundamental do cálculo e resolve alguns exemplos sem citar o cálculo de áreas. Define área como uma integral, e no caso de ser f negativa em um intervalo $[a,b]$, a área é dada por $área = -\int_a^b f(x)dx$. O autor desenvolve uma série de exemplos utilizando os registros língua natural, simbólico e gráfico, inclusive em um dos exemplos o conjunto de pontos é dado por uma expressão no registro simbólico algébrico que é convertido pelo autor para o registro língua natural e gráfico, o que não é usual, mas que pode facilitar o entendimento do exemplo. Para Duval, esse tipo de conversão deve ser mais explorado, pois são ditas não-congruentes.

No momento de apresentar o estudo sobre áreas, os autores utilizam principalmente os registros gráfico e simbólico, bastante explorados nos exemplos. Em exercícios, a partir de uma representação gráfica, Stewart propõe estimativas de área, e que são necessárias conversões para o registro simbólico, no qual são realizados tratamentos para encontrar a solução.

Os dois livros apresentam as técnicas de integração, explorando o registro simbólico, o que para Duval não é nada interessante, pois aparecem apenas os tratamentos. Isto talvez se faça necessário por se tratar de uma parte muito técnica e com muitas regras que precisam ser assimiladas pelo leitor. Os autores fazem de uma forma muito interessante, no registro gráfico, a apresentação da regra mudança de variável, o que é possível através da conversão. No exemplo apresentado por Guidorizzi, a visualização é facilitada, pois a região permanece com a mesma forma, apenas há um deslocamento no sentido do eixo dos x; já no exemplo de Stewart, a região sofre um achatamento vertical e, para compensar, um alongamento no sentido horizontal.

Nas aplicações, há uma riqueza maior de registros e são apresentadas muitas situações problemas que fazem com que o leitor circule por eles. As conversões são mostradas nos exemplos e até mesmo nos exercícios propostos há condições para a realização de várias delas, o que para Duval é algo interessante para a aprendizagem.

Na tentativa de responder as questões propostas, observamos que os autores utilizam vários registros, não só na apresentação do conteúdo, como também nos exemplos e nos enunciados dos exercícios propostos, em alguns casos propondo aos leitores a mudança de registros. Os autores dão grande ênfase ao registro simbólico ao trabalhar as técnicas de integração, mostrando de forma sutil a mudança de variável através do registro gráfico, com isso percebemos que as conversões são valorizadas. Em muitos exemplos elas são exploradas nas resoluções, especialmente, nas aplicações. Podemos ver várias situações problemas que exigem, de forma natural, a conversão para que sejam resolvidas. Até as conversões não congruentes são contempladas. Elas foram utilizadas na apresentação e interpretação de situações problema, com a utilização dos registros gráficos simbólico e língua natural para o desenvolvimento dos exemplos. Houve exploração principalmente do registro gráfico, que ajuda na visualização da região a ser encontrada, e da conversão para o registro tabela que melhor quantifica o valor desta área.

Os tratamentos são fundamentais, em especial, nos registros língua natural e simbólico que são bastante explorados em todas as etapas, tendo sua utilização acentuada ao se trabalhar as técnicas de integração.

Quanto a não confundir o objeto (integral) e a sua representação, não percebemos um trabalho mais específico dos autores. Esta questão deveria ser mais explorada na tentativa de esclarecer para o leitor o que é o objeto e como diferenciá-lo da representação.

Concluímos que os registros são apresentados, os tratamentos e conversões são explorados e, assim, almejamos que esta pesquisa sirva para reflexão inicial dos professores de Matemática, principalmente os de Cálculo, para que reflitam sobre a possibilidade de desenvolver um ensino mais significativo e contextualizado. Desta forma, esperamos que com este trabalho possamos contribuir para uma mudança expressiva e permanente do processo ensino-aprendizagem do cálculo, utilizando o livro didático como uma ferramenta viva, transformando o aluno em um agente ativo de sua aprendizagem e o professor assumindo uma postura de facilitador dessa aprendizagem.

Referências

AVILA, G. **Introdução à Análise Matemática.** 2ª edição; Edgard Blucher Ltda; São Paulo, 2000.

________ . **Evolução dos Conceitos de Função e de Integral**. Revista Matemática Universitária, Rio de Janeiro, n.1,1985: 14-46.

BARBOSA, O. B.; NETO, H. B. **Raciocino lógico formal e aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral: o caso da Universidade Federal do Ceará**. Temas e Debates, Blumenau: SBEM, v. VIII, n.6, 1992: 61-69.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Edições 70. Lisboa. 2002.

BARUFÍ, M. C. B. **A construção/negociação de significados do curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. Tese de Doutorado USP, 1999.

CAPATANI, E. C. **Cálculo em Serviço: Um Estudo Exploratório**. Bolema, n. 16, 2001: 48.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais de Matemática**. Lisboa Gradiva. 2000.

CATTO, G. G. **Registros de Representação e o Número Racional. Uma abordagem em livros didáticos**. Dissertação de Mestrado PUC-SP, 2000.

DAMN, R. F. Registros de representação. In. **Educação Matemática. Uma Introdução**; São Paulo; EDUC, 1999: 135-154.

DOLIS, M. **Ensino de Cálculo e o Processo de Modelagem**. Bolema. Rio Claro. V.14. nº 16, 1989: 48-62.

DUVAL, R. **"Sémiosis et Noésis"**. Conférence APMEP, IREM. 1992.

_______. **Registres de Representation Sémiotique fonctionnement Cognitif de la Pensée.** Annales. V.5, 1993: 37-65.

_______. **Sémiosis et pensée humaine.** Peter lang S.A. Berna. 1995:1-14.

FRANCHI, R. H. O. L. **A modelagem matemática como estratégia de aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral.** Rio Claro. 1993.

_______. **Cursos de Cálculo: uma proposta alternativa.** Temas e Debates, Blumenau. SBEM. v. VIII. n. 6, 1995: 39-43.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo.** V. 1. 5ª edição. Editora LTC. Rio de Janeiro. 2001.

LIMA, E. L. **Análise Real.** V. 1. 3ª edição Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro; 1997.

MORELATTI, M. R. M. **Criando um ambiente construcionista de aprendizagem em Cálculo Diferencial e Integral**. São Paulo, 2001. Tese (Doutorado em Educação) – Programa: Supervisão e currículo, PUCSP.

PALIS, G. R. **Computadores em Cálculo – uma alternativa que não se justifica por si mesma.** Temas e Debates, Blumenau. v. VIII. n. 6. 1995: 22-38.

PAVLOPOULOU, K. **"Propédeutique de L'algébre Linéaire: La coordination de représentation sémiotique".** Institut de Recherche Mathématique Avancée. Strasbourg. 1998.

VILLARREAL, M. E. **O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e Tecnologias Informáticas**. Rio Claro, 1999. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, universidade Estadual paulista.

STEWART, J. **Cálculo.** V.1. 4ª edição. Editora Pioneira Thomson Learning. São Paulo. 2002