Descobrindo uma nova fórmula para o número de diagonais em polígonos convexos

VASCONCELOS, Eduardo Silva.

Resumo

Este artigo pretende mostrar a veracidade de uma expressão para o cálculo do número de diagonais nos polígonos convexos. Para tal, é necessário trabalhar com os cinco níveis do pensamento geométrico, de Van Hiele. Será empregado o raciocínio indutivo e a primeira idéia da expressão será mostrada através de exemplos, conduzindo o pensamento através de uma rigorosa demonstração da fórmula

Palavras-chave: Matemática, Educação Matemática, Geometria

Abstract

This article intends to show the truthfulness of an expression for the reckoning of the numbers of diagonals in convex polygons. For that, it is necessary the deal with the five levels of Van Hiele's geometrical thought. It will be adopted the inductive reasoning and the first idea of the expression will be shown through examples, leading the reasoning through a tough demonstration of the formula.

Key-words: Mathematics, Mathematics Education, Geometry.

Sobre o autor

Eduardo Silva Vasconcelos

Graduação em matemática - Universidade de Marília - SP
Especialização em Matemática e Estatística -
Universidade Federal de Lavras - MG
Especialização em Educação Matemática -
Faculdades Integradas de Patrocínio - MG
Mestre em Educação - UNITRI - Uberlânia -MG

Descobrindo uma nova fórmula para o número de diagonais em polígonos convexos

VASCONCELOS, Eduardo Silva.

Com a proposta de desenvolver o raciocínio lógico e estimular a criatividade dos alunos em sala da aula, pois, compreendemos que assim se ensina Matemática, começamos procurar alternativas para aumentar a motivação destes alunos em sua aprendizagem. Em uma dessas tentativas, acabamos nos deparando com uma expressão para a obtenção do número de diagonais de polígonos convexos que ainda não vimos abordada nos livros que tratam do assunto.

As diagonais de um polígono são definidas como sendo os segmentos de retas que une dois vértices não adjacentes deste polígono e o número de diagonais de polígonos convexos é obtido pela fórmula: $d = \frac{(n-3).n}{2}$. Esta fórmula já confirmada por vários autores vem em todos os livros que abordam o assunto. Onde d representa o número de diagonais e n o número de lados. Isto é, o número de diagonais fica em função do número de lados.

Pais, (2002, p. 11) observa que:

> é necessário destacar que é somente a partir de seus resultados de pesquisas, sobretudo em sala de aula, que se pode indicar propostas pedagógicas com a finalidade de contribuir para uma melhor compreensão do fenômeno da aprendizagem da Matemática e uma conseqüente contribuição para a melhoria do seu ensino.

Neste artigo pretendemos mostrar esta nova expressão para a obtenção do número de diagonais de um polígono convexo. Ressaltando que a expressão foi obtida inicialmente através de trabalho em sala de aula, onde tentávamos resolver problemas, sobre o assunto. com os alunos. Tais problemas tinham a proposta de desenvolver a autoconfiança, a organização, a concentração, a atenção, o raciocínio lógico-dedutivo e o senso cooperativo, estimulando a socialização e aumentando as interações do indivíduo com outras pessoas, pois acreditamos que esses itens fazem parte do saber matemático.

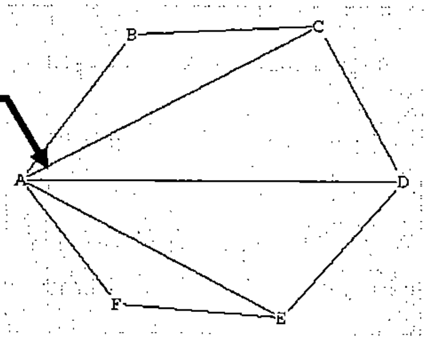
Crowley (1994) destaca o modelo de Van Hiele de pensamento geométrico que consiste em cinco níveis de compreensão: "visualização", "análise", "dedução informal", "dedução formal" e "rigor". Para Crowley o "modelo pode ser usado para orientar a formação, assim como para avaliar as habilidades do aluno" (CROWLEY, 1994, p. 1).

No nivel da "visualização" o aluno percebe a existência de diagonais nos poligonos, mas não como entes que possuem propriedades. No nível da "análise" o aluno, através da observação e da experimentação, começa a discernir características das diagonais para diferentes polígonos. No nível da "dedução informal", o aluno consegue estabelecer relações entre a quantidade de diagonais e a quantidade de lados do polígono. Daí, ele começa ser capaz de deduzir propriedades e as definições passam a ter significado, "porém não compreendem o significado da dedução como um todo ou o papel dos axiomas" (CROWLEY, 2002, p. 3). Os resultados obtidos, empiricamente, levaram-nos ao próximo nível, o da "dedução", pois o aluno passa a construir as demonstrações e passa a compreender a interação entre o numero de lados do polígono e o número de diagonais. No último nível, o do "rigor", chegamos ao plano abstrato da demonstração.

Pretendendo trabalhar com os cinco níveis do modelo de Van Hiele de pensamento geométrico, empregaremos o raciocínio indutivo e mostraremos através de um exemplo a primeira idéia da expressão. Utilizaremos o hexágono convexo, para tal, e conduziremos o raciocínio até uma demonstração rigorosa da fórmula.

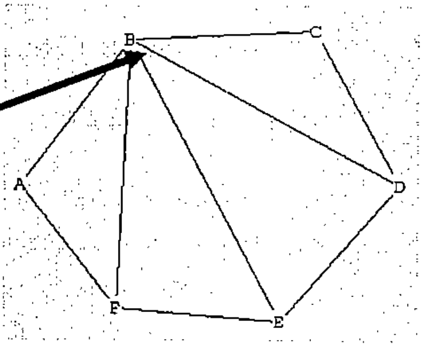
No hexágono (6 lados) a partir do vértice **A** têm-se três diagonais: AC, **AD, AE**.

No primeiro vértice escolhido o número de diagonais é igual ao número de lados menos três (6-3).



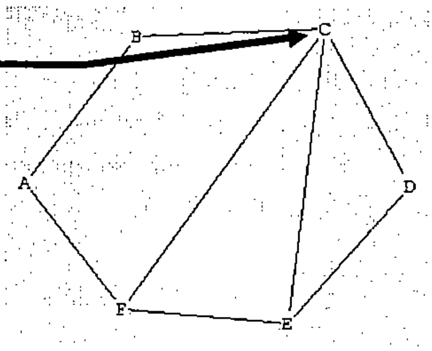
No hexágono (6 lados) a partir do vértice **B** têm-se três diagonais: **BD, BE, BF**.

No segundo vértice escolhido o número de diagonais é igual ao número de lados menos três (6-3).



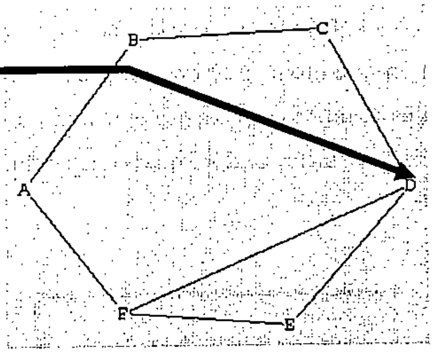
No hexágono (6 lados) a partir do vértice **C** têm-se duas diagonais distintas das que já foram obtidas anteriormente: **CE, CF**.

No terceiro vértice escolhido o número de diagonais é igual ao número de lados menos quatro (6-4).



No hexágono (6 lados) a partir do vértice **D** têm-se uma diagonal distinta das que já foram obtidas anteriormente: **DF**.

No <u>quarto vértice escolhido</u> o número de diagonais é igual ao número de lados menos cinco (6-5).



Observe que não existe mais nenhuma diagonal distinta das que já foram apontadas. Então podemos calcular o número de diagonais do hexágono somando as diagonais obtidas:

$$3 + 3 + 2 + 1 = 9$$

Utilizando a fórmula conhecida:

$$d_{hexagono} = \frac{6.(6-3)}{2} = 9$$

Notemos que o resultado é o mesmo.

Executando o mesmo procedimento com outros polígonos convexos, como por exemplo, o decágono (polígono de 10 lados) tem-se:

$$7 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 35$$

Utilizando a fórmula conhecida:

$$d_{decágono} = \frac{10.(10-3)}{2} = 35$$

Notemos que o resultado é igual.

Vejamos, em outro exemplo, o icoságono (polígono de 20 lados):

$$17 + 17 + 16 + 15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 170$$

Utilizando a fórmula conhecida:

$$d_{icoságono} = \frac{20.(20-3)}{2} = 170$$

Notemos que o resultado também é igual.

Daí pode-se induzir a uma fórmula geral para o cálculo do número de diagonais, *d*, de um polígono de *n* lados.

$$d = (n-3)+(n-3)+(n-4)+(n-5)+(n-6)+...+3+2+1$$

ou

$$d = (n-3)+\sum_{i=3}^{n-1}(n-i)$$

Desenvolvendo a expressão; para $n - i \geq 0$

$$(n-3)+(n-3)+(n-4)+(n-5)+(n-6)+...+3+2+1 = (n-3)+\sum_{i=3}^{n-1}(n-i) =$$

$$(n-3)+(n-3)+(n-4)+...+[n-(n-2)]+[n-(n-1)] =$$

$$n+n+n+...+n+n-3-3-4-5-...-(n-2)-(n-1) \text{ (I)}$$

Sendo que existem (n – 2) enes na expressão e que (– 3) pode ser expresso da forma (– 3 = – 1 – 2), reescrevemos a expressão (I):

$$(n-2).n-1-2-3-4-...-(n-2)-(n-1) = (n^2-2n)-[1+2+3+4+...+(n-1)]$$

(II)

Considerando a expressão $\frac{n.(1+n)}{2} = 1+2+3+...+(n-1)+n$, verdadeira, temos:

$$1+2+3+...+(n-1) = \frac{n.(1+n)}{2} - n$$

Substituindo na expressão (II):

$$(n^2-2n)-\left[\frac{n.(1+n)}{2}-n\right] = (n^2-n)-\left[\frac{n+n^2-2n}{2}\right] = \frac{2n^2-4n-n-n^2+2n}{2} =$$

$$= \frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{n.(n-3)}{2}$$

Donde, pode-se concluir que as expressões:

$$d = (n-3) + (n-3) + (n-4) + (n-5) + (n-6) + \ldots + 3 + 2 + 1$$

e

$$d = \frac{(n-3).n}{2}$$ são equivalente.

Para verificar se a expressão é válida para qualquer *n*, isto é, qualquer polígono convexo de *n* lados, utilizar-se-á o Princípio da Indução Finita.

$$(n-3) + \sum_{i=3}^{n-1} (n-i) = \frac{n.(n-3)}{2}; \text{ com } n - i \geq 0$$

Fazendo $n = 3$ pois o polígono convexo de menor número de lados é o triângulo.

$$(3-3) + (3-3) = \frac{3.(3-3)}{2}$$

0 = 0. Logo a expressão vale para o menor n possível.

Considerando a expressão verdadeira para $n = k$: Hipótese Indução.

$$(k-3) + \sum_{i=3}^{k-1} (k-i) = \frac{k.(k-3)}{2}; k - i \geq 0$$

Verificando se a expressão é verdadeira para $n = k + 1$.

$$(k+1-3) + \sum_{i=3}^{k+1-1} (k+1-i) = \frac{(k+1).(k+1-3)}{2} \quad (*)$$

Desenvolvendo:

$$\sum_{i=3}^{k} (k+1-i) = (k-2) + (k-3) + (k+4) + \ldots + 3 + 2 + 1 \quad \text{(I)}$$

Considerando:

$$(k-3)+(k-4)+\ldots+2+1=\sum_{i=3}^{k-1}(k-i),\text{ substituindo em (I).}$$

$$\sum_{i=3}^{k}(k+1-i)=(k-2)+\sum_{i=3}^{k-1}(k-i),\text{ substituindo em } (*).$$

$$(k-2)+(k-2)+\sum_{i=3}^{k-1}(k-i)=\frac{(k+1).(k-2)}{2} \quad (**)$$

Da Hipótese Indução:

$$\sum_{i=3}^{k-1}(k-i)=\frac{k.(k-3)}{2}-(k-3),\text{ substituindo em } (**).$$

$$(k-2)+(k-2)+\frac{k.(k-3)}{2}-(k-3)=\frac{k^2-2k+k-2}{2}$$

$$k+k-4-k+3+\frac{k^2-3k}{2}=\frac{k^2-2k+k-2}{2}$$

$$k-1+\frac{k^2-3k}{2}=\frac{k^2-k-2}{2}$$

$$\frac{2k-2+k^2-3k}{2}=\frac{k^2-k-2}{2}$$

$$\frac{k^2-k-2}{2}=\frac{k^2-k-2}{2}$$

Portanto, pelo Princípio da Indução Finita, pode-se concluir que a expressão:

$$d=(n-3)+(n-3)+(n-4)+(n-5)+(n-6)+\ldots+3+2+1$$

ou

$$d=(n-3)+\sum_{i=3}^{n-1}(n-i)$$

É verdadeira para o cálculo do número de diagonais de qualquer polígono convexo.

Considerações finais

Os alunos devem ser incitados a deduzir a fórmula e considero muito útil, nesse sentido, deixá-los manipular a construção das diagonais para polígonos diferentes, ficando a cargo do professor as intervenções para que o objetivo da descoberta não se perca em função do rigor da demonstração.

Observação:

Todas as figuras foram construídas utilizando o software livre Wingeom, que pode ser conseguido pelo site: http://math.exeter.edu/rparris/wingeom.html.

Para construção das expressões matemáticas, utilizadas nesse artigo, usou-se o *Equation Editor* do *Word*.

Referências

PAIS, Luiz Carlos (2002) "Introdução" In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. *et al. Educação Matemática: uma introdução.* – 2. ed. – São Paulo: EDUC,. (Série Trilhas), 9 – 12.

CROWLEY, Mary L. (1994) "O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico" In: LINDQUIST, Nary Montgomery. *et al.* (org). *Aprendendo e ensinando Geometria.* – São Paulo: Atual, 1 – 20.